Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»
Инженерно-физический факультет высоких технологий

Щиголев В.К.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ВЕКТОРНЫЙ И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ»

для студентов 2 курса инженерно-физического факультета высоких технологий
всех форм обучения

Ульяновск, 2019

Методические указания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Векторный и тензорный анализ» / составитель: В. К. Щиголев. - Ульяновск: УлГУ, 2019.

Настоящие методические указания предназначены для студентов 2 курса инженерно-физического факультета высоких технологий всех форм обучения, изучающих дисциплину «Векторный и тензорный анализ». В работе приведены литература по дисциплине, основные темы курса и вопросы в рамках каждой темы, рекомендации по изучению теоретического материала, контрольные вопросы для самоконтроля. Студентам очной формы обучения они будут полезны при подготовке к практическим занятиям и к экзамену по данной дисциплине.

Рекомендованы к введению в образовательный процесс Ученым советом Инженерно-физического факультета высоких технологий УлГУ (протокол № 11от 18 июня 2019 г.).

Оглавление

Литература для изучения дисциплины

1. Анчиков А. М. Основы векторного и тензорного анализа. Издательство Казанского университета, 1988 – 135 с.: ил. http://www.ulsu.ru/com/chairs/themp/stud/

Тема 1. Понятие скалярного поля.

Основные вопросы темы:

1. Поверхности уровня.
2. Производная по направлению.
3. Градиент скалярного поля и его физический смысл.

Рекомендации по изучению темы:

Вопрос изложен в параграфах 1 - 4 главы 1 в [1].
Задачи к теме приведены в параграфе 1 №№ 1-55 раздела «Задачи и упражнения» [1].

Тема 2. Дивергенция и ротор векторного поля.

Основные вопросы темы:

1. Векторная запись теоремы Остроградского-Гаусса.
2. Поток и дивергенция векторного поля.
3. Векторная запись теоремы Стокса.
4. Циркуляция и ротор векторного поля.

Рекомендации по изучению темы:

Вопрос изложен в параграфах 5 - 9 главы 2 в [1].
Задачи к теме приведены в параграфе 2 №№ 56-124 раздела «Задачи и упражнения» [1].

Тема 3. Потенциальные и соленоидальные поля

Основные вопросы темы:

1. Потенциальное векторное поле.
2. Лапласово поле.
3. Соленоидальное (вихревое) векторное поле.

Рекомендации по изучению темы:

Вопрос изложен в параграфах 10 - 15 главы 2 в [1].
Задачи к теме приведены в параграфе 2 №№ 125-147 раздела «Задачи и упражнения» [1].

Тема 4. Криволинейные ортогональные системы координат.

Основные вопросы темы:

1. Криволинейные ортогональные системы координат.

2. Понятие локального базиса. Коэффициенты Ламэ.
3. Цилиндрическая система координат.
4. Сферическая система координат.

Рекомендации по изучению темы:
Вопрос изложен в параграфе 16.1 главы 2 в [1].
Задачи к теме приведены в параграфе 2 №№ 148-168 раздела «Задачи и упражнения» [1].

Тема 5. Основные операции в криволинейных координатах.

Основные вопросы темы:
1. Градиент скалярного поля в криволинейных координатах.
2. Дивергенция векторного поля в криволинейных координатах.
3. Ротор векторного поля в криволинейных координатах.
4. Лапласиан скалярного поля в криволинейных координатах.

Рекомендации по изучению темы:
Вопрос изложен в параграфах 16.2-16.5 главы 2 в [1].
Задачи к теме приведены в параграфе 2 №№ 189-216 раздела «Задачи и упражнения» [1].

Тема 6. Тензоры в аффинном пространстве

Основные вопросы темы:
1. Аффинная координатная система.
2. Преобразование аффинного репера.
3. Ковариантный тензор в аффинном пространстве.
4. Контравариантный тензор в аффинном пространстве.
5. Общее определение тензора.
6. Алгебра тензоров.

Рекомендации по изучению темы:
Вопрос изложен в параграфах 17-23 главы 3 в [1].
Задачи к теме приведены в параграфе 3 №№ 217-231 раздела «Задачи и упражнения» [1].

Тема 7. Тензоры в метрическом пространстве

Основные вопросы темы:
1. Евклидово пространство.
2. Метрика пространства. Сигнатура пространства.
3. Тензорные операции в евклидовом пространстве
4. Параллельный перенос вектора в метрическом пространстве.

Рекомендации по изучению темы:
Вопрос изложен в параграфах 25-26 главы 3 в [1].

Задачи к теме приведены в параграфе 3 №№ 232-249 раздела «Задачи и упражнения» [1].

Тема 8. Ковариантное дифференцирование тензоров.

Основные вопросы темы:

1. Коэффициенты связности.
2. Символы Кристоффеля.
3. Абсолютный дифференциал.
4. Ковариантная производная тензора произвольной валентности.

Рекомендации по изучению темы:

Вопрос изложен в параграфах 27-28 главы 3 в [1].

Задачи к теме приведены в параграфе 3 №№ 265-275 раздела «Задачи и упражнения» [1].

Тема 9. Тензоры в Римановом (искривленном) пространстве.

Основные вопросы темы:

1. Производная по направлению в Римановом пространстве.
2. Геодезические линии.
3. Тензор кривизны Римана. Тензор Эйнштейна.

Рекомендации по изучению темы:

Вопрос изложен в параграфах 29-34 главы 3 в [1].

Задачи к теме приведены в параграфе 3 №№ 276-287 раздела «Задачи и упражнения» [1].

Приложение 1. Задачи для самоконтроля

1. Найти ∇u в точке М(1,1,-1), если $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$
2. Найти угол φ между градиентами скалярного поля $u = arctg\dfrac{x}{y}$ в точках M_1 (1,1) и M_2 (-1,-1).
3. Найти производную поля $u = yxe^x$ в точке M_0 (0, 0, 1) по направлению его градиента.
4. Найти производную скалярного поля $u = xyz$ в точке M_0 (1, -1, 1) по направлению от точки M_0 к точке M_1 (2, 3, 1).
5. Доказать ортогональность линий уровня полей $u = x^2 - y^2$, $v = xy$.
6. Найти точки, в которых градиент скалярного поля $u = \sin(x + y)$ равен $\vec{i} + \vec{j}$.
7. Найти единичный вектор нормали к поверхности уровня поля $u = x^2 + 2xy - 4yz$ в точке $M_0(1,1,-1)$, направленный в сторону возрастания поля.
8. Найти величину и направление градиента скалярного поля

$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - 2y - 6z$ в точке $M_0(1,1,1)$. В какой точке градиент поля равен нулю?

9. Вычислить : а) ∇r, б) ∇r^2, в) $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$, г) $\nabla \ln r$, где r - модуль радиуса – вектора.
10. Найти поток вектора $\vec{r}$: а) через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \le z^2$ $(0 \le z \le h)$ б) через основание этого конуса.
11. Вычислить работу силового поля $\vec{F} = (x^2 + 2xy)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ вдоль параболы $y = x^2$ от точки (0, 0) до точки (1, 1).
12. Найти работу векторов $\vec{F} = \vec{r}$ вдоль отрезка винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $(0 \le t \le 2\pi)$.
13. Вычислить работу силового поля $\vec{F} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$ вдоль дуги окружности $x^2 + y^2 = 1$ от точки $(1,0)$ до точки $(0,1)$.
14. Определить векторные линии поля $\vec{F} = (z - y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (y - x)\vec{k}$.
15. Вычислить: а) $div\vec{r}$, б) $div\frac{\vec{r}}{r}$.
16. Найти $\nabla \cdot \vec{F}$, если $\vec{F} = x(y^2 + z^2)\vec{i} + y(x^2 + z^2)\vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}$.
17. Найти дивергенцию вектора $\vec{F} = \frac{\varphi(r)}{r}\vec{r}$.
18. Найти $div(f(r)\vec{r})$. В каком случае дивергенция этого вектора равна нулю?
19. Найти дивергенции и вихри следующих векторов: а) $(\vec{a}\vec{r})\vec{b}$; б) $[\vec{a}\vec{r}]$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - постоянные векторы.
20. Показать потенциальность векторного поля $\vec{F} = \left(\frac{1}{z} - \frac{y}{x^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{z^2}\right)\vec{k}$ и найти его потенциал.
21. Показать потенциальность векторного поля $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^2}$ и найти его потенциал.
22. Показать потенциальность векторного поля $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ и найти его потенциал.
23. Показать, что поле $\vec{F} = 2y\vec{i} - z\vec{j} + 2x\vec{k}$ соленоидально и найти его векторный потенциал.
24. Показать, что поле $\vec{F} = ye^{x^2}i + 2yz\vec{j} - (2xyze^{x^2} + z^2)\vec{k}$ соленоидально и найти его потенциал.
25. Доказать тождество: $div[\vec{F},\vec{W}] = \vec{W}rot\vec{F} - \vec{F}rot\vec{W}$.
26. Доказать тождество: $[[\vec{F},\nabla],\vec{W}] = (\vec{F}\nabla)\vec{W} + [\vec{F}, rot\vec{W}] - \vec{F}div\vec{W}$.
27. Показать, что $rot(r\vec{a}) = \frac{1}{r}[\vec{r}\vec{a}]$, где $\vec{a}$ - постоянный вектор.

28. Показать, что $rot\left(f\left(r\right)\vec{a}\right)=\dfrac{f'\left(r\right)}{r}\left[\vec{r},\vec{a}\right]$, где $f\left(r\right)$ - произвольная функция, $\vec{a}$ - постоянный вектор.

29. Найти $rot\ rot\ \vec{F}$, если $\vec{F}=xy^2\vec{i}+yz^2\vec{j}+zx^2\vec{k}$.

30. Найти градиент скалярного поля $u=r^2+2r\cos\varphi-e^z\sin\varphi$ (r, φ , z – цилиндрические координаты).

31. Найти градиент скалярного поля $u=r^2\cos\theta$ в сферических координатах.

32. Вычислить дивергенцию поля $\vec{F}=\varphi\cdot arctgr\cdot\vec{e}_r+2\vec{e}_\varphi-z^2e^z\vec{e}_z$ в цилиндрических координатах.

33. Вычислить дивергенцию вектора $\vec{F}=\dfrac{2\cos\theta}{r^3}\vec{e}_r+\dfrac{\sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta$ в сферических координатах.

34. Найти ротор векторного поля $\vec{F}=r^2\vec{e}_r+2\cos\theta\vec{e}_\theta-\varphi\vec{e}_\varphi$ в сферических координатах.